L3 SM UE604P	Université de Tours	Année 2009-2010

Méthodes mathématiques pour la physique

session 2	14/06/2010	durée de l'examen: 2h

1. Soient $\hat{L}_{\pm}$, L_z trois opérateurs suivants:

$$\begin{aligned} \hat{L}_+ &= z^2\partial_z + \partial_{\bar{z}}, \\ \hat{L}_- &= -\partial_z - \bar{z}^2\partial_{\bar{z}}, \\ \hat{L}_z &= z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}}, \end{aligned}$$

où ∂_z et $\partial_{\bar{z}}$ notent les dérivées par rapport à z et $\bar{z}$. Montrer que ces opérateurs vérifient les relations de commutation de l'algèbre du moment angulaire.

2. Donner la forme explicite de l'harmonique sphérique $Y_3^{-1}(\theta,\varphi)$.

3. Dans cet exercice on s'intéresse à l'équation de Kummer:

$$xy''(x) + (b-x)y'(x) - ay(x) = 0. \tag{1}$$

Ici x note la variable indépendante et $a, b \in \mathbb{C}$ sont des paramètres constants.

- Décrire les comportements asymptotiques possibles des solutions de cette équation lorsque a) $x \to 0$; b) $x \to +\infty$.

L'étude précédente semble de montrer qu'il existe une solution de (1) développable en série de Taylor au voisinage de $x = 0$. On cherche donc cette solution sous la forme

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k. \tag{2}$$

- Montrer que les coefficients α_k sont donnés par

$$\alpha_k = \frac{1}{k!}\frac{\Gamma(b)\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)\Gamma(b+k)}\,\alpha_0.$$

La solution (2) de (1) avec $\alpha_0 = 1$ s'appelle la fonction de Kummer et est noté $M(a,b,x)$.

- Montrer que pour $\operatorname{Re} b > \operatorname{Re} a > 0$ la fonction $M(a,b,x)$ admet la représentation intégrale suivante:

$$M(a,b,x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}\int_0^1 e^{xt}t^{a-1}(1-t)^{b-a-1}\,dt.$$